netzen versehen, welche jenen gleichen, die in der Rindenschichte des Herzens angetroffen werden. Die übrigen Ganoiden vorzunehmen, erwarte ich die Zusendung neuen ichthyologischen Materials, dessen Ankunft mir erlauben wird, eine Untersuchung abzuschliessen, über deren bisher erlangte Hauptergebnisse ich hiermit nur eine vorläufige Anzeige erstattet habe.

Nachschrift.

An einem so eben erhaltenen riesigen Exemplare von *Hexanchus griseus* zeigte die capillare Injection der *Arteriae coronariae* einen ähnlichen Gefässreichthum des gesammten Herzfleisches, wie bei den Ganoiden, und es steht zu erwarten, dass das Herz der Rochen und Chimaeren sich ebenso verhält, worüber ich in Bälde Gewissheit zu erhalten hoffe.

Die Änderungen der Krystallaxen des Aragonites durch die Wärme gerechnet aus Rudberg's Beobachtungen.

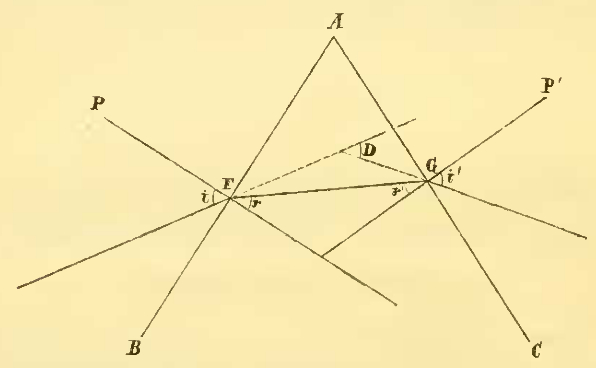
Von **Dr. Viktor v. Lang.**

1. Man verdankt Rudberg [1]) die genaue Kenntniss der optischen Constanten des Aragonites, welche er durch Prismen ermittelte, die parallel je einer Krystallaxe geschnitten waren. Derselbe [2]) bestimmte später mittelst dieser Prismen auch die Werthe der Brechungsquotienten für eine Temperatur-Erhöhung von 64° C. Aus den hiebei nöthigen Beobachtungen der Änderungen der brechenden Winkel liessen sich mit Leichtigkeit die Änderungen der Krystallaxen berechnen, falls nur die Orientirung der Prismenseiten gegen die Axen bekannt wäre. Diese Orientirung lässt sich aber aus den Werthen bestimmen, welche Rudberg für die Minimum-Ablenkung der ausserordentlichen Strahlen bei der gewöhnlichen Temperatur (16°—18° C.) fand. Die Zahlen, welche derselbe aus diesen Werthen nach der Minimum-Formel $n = sin\frac{A+D}{2} : sin\frac{A}{2}$ rechnet,

[1]) Pogg. XVII (1828), p. 1.
[2]) Pogg. XXVI (1832), p. 291.

haben zwar eigentlich keine Bedeutung, da diese Formel nur unter der Voraussetzung gilt, dass bei dem Minimum der Ablenkung die Wellennormale gleich geneigt gegen beide Prismenflächen sei, was für die ausserordentliche Welle im Allgemeinen nicht stattfindet. Trotzdem ist es aber möglich aus dem Ablenkungswinkel für die Minimumstellung, aus dem brechenden Winkel und aus den beiden Hauptbrechungsquotienten, zwischen denen der Brechungsquotient der ausserordentlichen Welle variirt, die Orientirung des Prisma's zu gewinnen.

Die hiezu nöthigen Formeln wurden schon von Sénarmont [1]) entwickelt. Zur Vervollständigung werde ich jedoch eine kurze Ableitung dieser Formeln für die Minimum-Ablenkung durch Prismen, welche einer optischen Elasticitätsaxe parallel sind, nebst einigen Bemerkungen über den Nutzen derselben vorausschicken.



2. Wir bezeichnen mit

A die Grösse der brechenden Kante, welche einer optischen Elasticitätsaxe parallel läuft;

i, i' die Winkel, welche die eintretende und austretende Wellennormale mit den Flächennormalen P, P' der Prismenseiten bilden;

r, r' die Winkel, welche die durchgehende Wellennormale mit eben diesen Flächennormalen einschliesst;

D den Ablenkungswinkel der Wellennormale [2]);

n den Brechungs-Quotienten der ausserordentlichen Welle für die durch r gegebene Richtung;

δ, ε die beiden Hauptbrechungs-Quotienten, zwischen denen n variirt;

---

[1]) Nouv. Ann. de Mathém. t. XVI.

[2]) Die Winkel i, i', D haben gleiche Werthe, für die Wellennormale und den zugehörigen Strahl, wodurch es auch einzig möglich wird, die Grössen dieser Winkel durch directe Beobachtung zu finden.

θ den Winkel, welche die Halbirungslinie des brechenden Winkels A mit der δ entsprechenden Elasticitätsaxe einschliesst.

Man hat nun für den Durchgang der Wellen folgende Gleichungen

$$\left.\begin{array}{c} A = r + r' \ ; \ A + D = i + i' \\ \dfrac{\sin i}{\sin r} = \dfrac{\sin i'}{\sin r'} = n \end{array}\right\} \quad (1)$$

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2} - r - \theta\right)^2}{\delta^2} + \frac{\sin\left(\frac{A}{2} - r - \theta\right)^2}{\varepsilon^2} \quad (2)$$

Die letzte Gleichung erhält man nach den Gesetzen der Doppelbrechung, indem die durchgehende Wellennormale, deren Geschwindigkeit im Allgemeinen durch den Radius einer Ellipse gegeben ist, mit der Elasticitätsaxe δ einen Winkel $90° + \frac{A}{2} - r - \theta$ einschliesst.

Für das Minimum der Ablenkung hat man noch folgende Bedingung

$$\frac{dD}{dr} = 0 \quad (3)$$

Aus diesen sechs Gleichungen mit zehn variablen Grössen lässt sich immer eine Gleichung mit nur fünf Variabeln (z. B. A, D, θ, δ, ε) bilden.

Will man allgemein aus i, A, D den Brechungsquotienten n bestimmen, so verfährt man bekanntlich folgendermassen:

$$\frac{\sin i + \sin i'}{\sin r + \sin r'} = \frac{\sin i - \sin i'}{\sin r - \sin r'} = n$$

$$= \frac{\sin\frac{A+D}{2}\cos\left(i - \frac{A+D}{2}\right)}{\sin\frac{A}{2}\cos\left(\frac{A}{2} - r\right)} = \frac{\cos\frac{A+D}{2}\sin\left(i - \frac{A+D}{2}\right)}{\cos\frac{A}{2}\sin\left(\frac{A}{2} - r\right)} = n \quad (4)$$

und hieraus erhält man zur Bestimmung von n die bekannten Gleichungen

$$n = \frac{\sin i}{\sin r} \ ; \ \tan\left(\frac{A}{2} - r\right) = \tan\frac{A}{2}\tan\left(i - \frac{A+D}{2}\right)\cot\frac{A+D}{2} \quad (I)$$

Aus Gleichung 4) erhält man aber auch sogleich

$$\frac{1}{n^2} = \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{A}{2} - r\right)^2 + \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\sin\left(\frac{A}{2} - r\right)^2 \quad (5)$$

Differentirt man diese Gleichung nach r, so erhält man mit Rücksicht auf Gleichung 3)

$$
(6)\quad \begin{aligned}
\frac{1}{n^3}\cdot\frac{dn}{dr} = & -\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{A}{2}-r\right)\sin\left(\frac{A}{2}-r\right) \\
& + \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\sin\left(\frac{A}{2}-r\right)\cos\left(\frac{A}{2}-r\right)
\end{aligned}
$$

Zufolge Gleichung 3) hat man aber anderseits

$$
\frac{1}{n^2} = \frac{\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)^2}{\delta^2} + \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)^2}{\varepsilon^2}
$$

$$
\frac{1}{n^3}\cdot\frac{dn}{dr} = -\frac{\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\delta^2} + \frac{\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\varepsilon^2}
$$

Hieraus ergibt sich

$$
(7)\quad \left\{ \begin{aligned}
\cos\frac{\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\delta^2} &= \frac{1}{n^2}\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right) - \frac{1}{n^3}\frac{dn}{dr}\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right) \\
\sin\frac{\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\varepsilon^2} &= \frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right) + \frac{1}{n^3}\frac{dn}{dr}\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)
\end{aligned} \right.
$$

Führt man in diese Gleichungen die Werthe für $\frac{1}{n^2}$ und $\frac{1}{n^3}\frac{dn}{dr}$ aus Gleichung 5) und 6) ein, so erhält man

$$
(8)\quad \left\{ \begin{aligned}
\frac{\cos\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\delta^2} = & \frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{A}{2}-r\right)\cos\theta \\
& + \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\sin\left(\frac{A}{2}-r\right)\sin\theta \\
\frac{\sin\left(\frac{A}{2}-r-\theta\right)}{\varepsilon^2} = & -\frac{\sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\cos\left(\frac{A}{2}-r\right)\sin\theta \\
& + \frac{\cos\left(\frac{A}{2}\right)^2}{\cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}\sin\left(\frac{A}{2}-r\right)\cos\theta
\end{aligned} \right.
$$

Ersetzt man in diesen Gleichungen $tan\left(\frac{A}{2}-r\right)$ durch seinen Werth aus Gleichung 4), so ist

$$\left.\begin{aligned}\delta^2 &= \frac{sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}{sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}\cdot\frac{tan\frac{A}{2}\,cot\frac{A+D}{2}\,tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)+cot\,\theta}{cot\frac{A}{2}\,tan\frac{A+D}{2}\,tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)+cot\,\theta}\\ \varepsilon^2 &= \frac{sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2}{sin\left(\frac{A}{2}\right)^2}\cdot\frac{tan\frac{A}{2}\,cot\frac{A+D}{2}\,tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)-tan\,\theta}{cot\frac{A}{2}\,tan\frac{A+D}{2}\,tan\left(i-\frac{A+D}{2}\right)-tan\,\theta}\end{aligned}\right\}\quad\text{(II)}$$

Diese Gleichungen sind mit den von Sénarmont mit 6) bezeichneten identisch; sie dienen zur Bestimmung von δ und ε, wenn A, D, θ und i bekannt sind.

Man kann diese Gleichung auch in folgender Form schreiben:

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\delta^2 sin\left(\frac{A}{2}\right)^2-sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}cos\frac{A}{2}\,cos\frac{A+D}{2}\,cos\left(i-\frac{A+D}{2}\right)cos\,\theta=\\ &=-\left\{\delta^2 cos\left(\frac{A}{2}\right)^2-cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}sin\frac{A}{2}\,sin\frac{A+D}{2}\,sin\left(i-\frac{A+D}{2}\right)sin\,\theta\\ &\left\{\varepsilon^2 cos\left(\frac{A}{2}\right)^2-cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}sin\frac{A}{2}\,sin\frac{A+D}{2}\,sin\left(i-\frac{A+D}{2}\right)cos\,\theta=\\ &=-\left\{\varepsilon^2 sin\left(\frac{A}{2}\right)^2-sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}cos\frac{A}{2}\,cos\frac{A+D}{2}\,cos\left(i-\frac{A+D}{2}\right)sin\,\theta\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

In dieser Form eignen sich nun diese Gleichungen sehr gut zur Elimination von θ oder i. Multiplicirt man die beiden Gleichungen, wie sie unter einander stehen, so erhält man

$$\left.\begin{aligned}&\left\{\delta^2 sin\left(\frac{A}{2}\right)^2-sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}\left\{\varepsilon^2 cos\left(\frac{A}{2}\right)^2-cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}cos\,\theta^2+\\ &+\left\{\delta^2 cos\left(\frac{A}{2}\right)^2-cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}\left\{\varepsilon^2 sin\left(\frac{A}{2}\right)^2-sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}sin\,\theta^2=0\end{aligned}\right\}\quad\text{(III)}$$

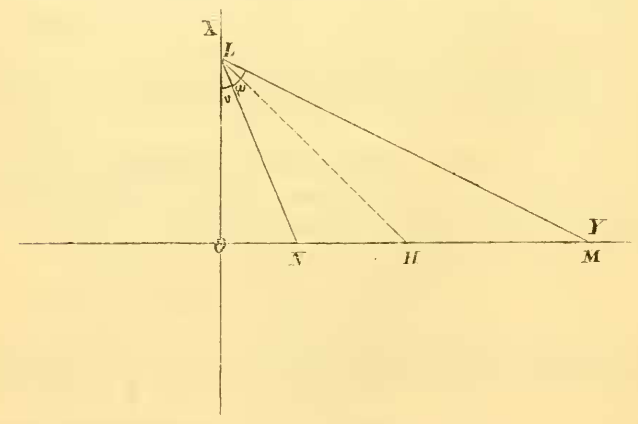
Diese Gleichung [von Sénarmont mit 7) bezeichnet] kann erstens dazu dienen, einen der Hauptbrechungsquotienten δ und ε zu bestimmen, wenn der andere und die Grössen A, D, θ bekannt sind. Anderseits findet man aus dieser Gleichung die Orientirung θ aus den Grössen A, B, δ, ε, was wir eben für unsere Aufgabe benöthigen.

Multiplicirt man die Gleichungen 9) kreuzweise, so hat man hingegen

$$
(\mathrm{IV})\left\{
\begin{aligned}
&\left\{\delta^2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}\left\{\varepsilon^2 \sin\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}. \\
&\qquad \cos\left(\frac{A}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 \cos\left(i - \frac{A+D}{2}\right)^2 + \\
+ &\left\{\delta^2 \cos\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}\left\{\varepsilon^2 \cos\left(\frac{A}{2}\right)^2 - \cos\left(\frac{A+D}{2}\right)^2\right\}. \\
&\qquad \sin\left(\frac{A}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{A+D}{2}\right)^2 \sin\left(i - \frac{A+D}{2}\right)^2 = 0
\end{aligned}
\right.
$$

Aus dieser Gleichung findet man falls die Orientirung unbekannt ist, was bei weitem der häufigste Fall, einen der Hauptbrechungsquotienten aus dem andern mit Hilfe der Grössen A, D, i [1]).

3. Aus der Gleichung III, welche sich auch für die logarithmische Berechnung leicht umstellen lässt, kann man also die Orientirung der von Rudberg verwendeten Prismen bestimmen und es bleibt die weitere Aufgabe die Änderung der Axen aus den Änderungen des brechenden Winkels zu bestimmen; natürlich kann hiebei nur von der Änderung des Axenverhältnisses die Rede sein.



Wir nennen zu diesem Zwecke

d, e die Längen der den Richtungen OX und OY entsprechenden Krystallaxen bei gewöhnlicher,

d', e' die Längen dieser Axen bei erhöhter Temperatur.

---

[1]) Zur Bestimmung der drei Hauptbrechungsquotienten genügen also schon zwei Prismen, die je einer Elasticitätsaxe parallel geschnitten, sonst aber beliebig orientirt sind.

A, A' die Neigungswinkel der beiden Prismenflächen für gewöhnliche und erhöhte Temperatur,

μ, ν die Winkel, welche die beiden Prismenflächen mit der Richtung der Axe d einschliessen, bei gewöhnlicher,

μ', ν' diese Winkel bei erhöhter Temperatur,

me, ne die durch die Prismenflächen abgeschnittenen Stücke der Axe OY, wenn wir uns denken, dass beide Flächen die Axe OX in der Entfernung $d = LO$ schneiden.

Wir haben somit

$$A = \mu - \nu \qquad A' = \mu' - \nu'$$

$$m = \frac{d}{e} \tan \mu \qquad n = \frac{d}{e} \tan \nu$$

Da durch die Temperatur-Erhöhung die Verhältnisszahlen m und n ungeändert bleiben, so hat man ferner

$$m = \frac{d'}{e'} \tan \mu' \qquad n = \frac{d'}{e'} \tan \nu'$$

und daher

$$\frac{d}{e} \tan \mu = \frac{d'}{e'} \tan \mu'$$

$$\frac{d}{e} \tan \nu = \frac{d'}{e'} \tan \nu'$$

hieraus erhält man die beiden neuen Gleichungen

$$\frac{e'}{d'} \cdot \frac{d}{e} (\tan \mu - \tan \nu) = (\tan \mu' - \tan \nu')$$

$$1 + \frac{d^2}{e^2} \cdot \frac{e'^2}{d'^2} \tan \mu . \tan \nu = 1 + \tan \mu' \tan \nu'$$

Die Division dieser Gleichungen gibt

$$\frac{d}{e} \cdot \frac{e'}{d'} (\tan \mu - \tan \nu) = \tan A' \left(1 + \frac{d^2}{e^2} \cdot \frac{e'^2}{d'^2} \tan \mu . \tan \nu\right)$$

oder in anderer Gestalt

$$\frac{d^2}{e^2} \cdot \frac{e'^2}{d'^2} - \frac{d}{e} \cdot \frac{e'}{d'} \cdot \frac{\sin A}{\tan A' \sin \mu . \sin \nu} = \frac{1}{\sin \mu . \sin \nu} \qquad (10)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Werth von $\frac{e'}{d'}$ in der Form

$$\frac{e'}{d'} = \frac{e}{d} . h$$

Die Wahl zwischen den beiden Werthen der Gleichung 10) ist nicht schwierig, da die Grösse h sich nicht weit von der Einheit entfernen kann.

Schneidet eine Fläche die Axe OY auf der entgegengesetzten Seite, so hat man die analoge Gleichung

$$(11)\qquad \frac{d^2}{e^2} \cdot \frac{e'^2}{d'^2} + \frac{d}{e} \cdot \frac{e'}{d'} \cdot \frac{\sin A}{\tan A' \sin \mu \sin \nu} = -\frac{1}{\sin \mu \sin \nu}$$

wo μ und ν wieder die Winkel sind, welche die Prismenflächen mit der Axe OY einschliessen, beide Winkel gezählt in entgegengesetzter Richtung.

4. Bezeichnen wir mit $a, b, c \ldots . a', b', c'$ die Krystallaxen bei gewöhnlicher und erhöhter Temperatur, mit $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$ die optischen Elasticitätsaxen des Aragonits, so dass $a > b > c$ und $\mathfrak{a} > \mathfrak{b} > \mathfrak{c}$ ist, so hat man, da das Schema der Elasticitätsaxen für Aragonit $\mathfrak{c}\underline{\mathfrak{a}}\mathfrak{b}$ ist:

$$a \parallel \mathfrak{c}\ ,\ b \parallel \mathfrak{a}\ ,\ c \parallel \mathfrak{b}.$$

Wir bezeichnen ferner mit α, β, γ die drei Hauptbrechungsquotienten, so zwar dass

$$\alpha = \frac{1}{\mathfrak{a}}\ ,\ \beta = \frac{1}{\mathfrak{b}}\ ,\ \gamma = \frac{1}{\mathfrak{c}}\ ,\ \text{und daher } \alpha < \beta < \gamma$$

Die numerischen Werthe der einzelnen Prismen, für welche Rudberg die Änderung des brechenden Winkels bestimmte, sind nun Folgende. Hiebei werden die Werthe in Betreff derjenigen Fraunhofer'schen Linie genommen, welche Rudberg auf das Minimum ihrer Ablenkung einstellte.

Prisma A, Nr. 2.

Dieses Prisma gibt den kleinsten Hauptbrechungsquotienten; die brechende Kante ist also parallel $\mathfrak{a} \parallel b$, und dieses Prisma gibt daher die Änderung des Axenverhältnisses $\frac{c}{a}$. Man hat

$A = 51° 48' 31''$ Temperatur 18° C.,

$A' = 51° 49' 1''$,

$D = 43° 27' 40''$ für das Minimum des Strahles F,

$\left.\begin{array}{l}\delta = \beta = 1{\cdot}69053 \\ \varepsilon = \gamma = 1{\cdot}69515\end{array}\right\}$ für den Strahl F,

$\theta = 23° 40' 43''$ Winkel der Halbirungslinie mit c.

Die Winkel der beiden Prismenseiten mit der Axe c sind daher

$$\mu = \frac{A}{2} + \theta = \quad 49° 34' 58''$$

$$\nu = \frac{A}{2} - \theta = \quad 2^\circ\, 13'\, 33''$$ hieraus erhält man

$$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \,.\, 0{\cdot}999726.$$

Prisma B, Nr. 2.

Es entspricht diesem Prisma der grösste Hauptbrechungsquotient und die brechende Kante desselben ist also parallel c ∥ a, wir erhalten durch dieses Prisma die Änderung von $\frac{c}{b}$. Es ist für dieses Prisma

$A = 40^\circ\, 12'\, 3''$ Temperatur 18° C.,
$A' = 40^\circ\, 10'\, 10''$,
$D = 23^\circ\, 50'\, 11''$ Minimum-Ablenkung der Linie H,
$\left.\begin{array}{l}\delta = \alpha = 1{\cdot}54226 \\ \varepsilon = \beta = 1{\cdot}70509\end{array}\right\}$ für die Linie H,
$\theta = 3^\circ\, 34'\, 41''$ Winkel der Halbirungslinie mit der Axe b, und daher die Winkel der Prismenseiten mit dieser Axe

$$\mu = \frac{A}{2} + \theta = 23^\circ\, 40'\, 43''$$

$$-\nu = \frac{A}{2} - \theta = 16^\circ\, 31'\, 21'',$$ woraus man findet

$$\frac{c'}{b'} = \frac{c}{b} \,.\, 0{\cdot}999269.$$

Prisma C, Nr. 2.

Rudberg erhielt durch dieses Prisma den mittleren Hauptbrechungsquotienten; das Prisma hat daher seine brechende Kante parallel b ∥ c, und gibt die Änderungen des Axenverhältnisses $\frac{b}{a}$.

$A = 41^\circ\, 34'\, 32''$ Temperatur 16° C.,
$A' = 41^\circ\, 33'\, 51''$,
$D = 25^\circ\, 44'\, 16''$ für das Minimum der Linie H,
$\left.\begin{array}{l}\delta = \gamma = 1{\cdot}70011 \\ \varepsilon = \alpha = 1{\cdot}54216\end{array}\right\}$ für die Linie H,
$\theta = 67^\circ\, 50'\, 39''$ Winkel der Prismenflächen mit der Axe a; man hat also für die Winkel der Prismenflächen mit der Axe a

$$\mu = \theta + \frac{A}{2} = 88° \, 37' \, 55''$$

$$\nu = \theta + \frac{A}{2} = 47° \;\; 3' \, 23'',$$ hieraus folgt

$$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \,.\, 1{\cdot}000407.$$

Da man eines der drei Verhältnisse $\frac{b'}{a'}$, $\frac{c'}{a'}$, $\frac{c'}{b'}$ ersichtlich aus den beiden andern finden kann: so erhält man mit Vernachlässigung der unbedeutenden Temperaturunterschiede der einzelnen Prismen für die Verhältnisse $\frac{b'}{a'}, \frac{c'}{a'}$ folgende Werthe:

	gerechnet aus den beiden anderen Verhältnissen
$\frac{b'}{a'} = \frac{b}{a} \,.\, 1{\cdot}000407$	$\frac{b}{a} \,.\, 1{\cdot}000457$
$\frac{c'}{a'} = \frac{c}{a} \,.\, 0{\cdot}999726$	$\frac{c}{a} \,.\, 0{\cdot}999676.$

Nimmt man aus diesen Doppelwerthen, welche zugleich ein Urtheil über den Grad der Genauigkeit geben, das Mittel, so hat man schliesslich

$$(12) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{b'}{a'} &= \frac{b}{a} \,.\, 1{\cdot}000432 \\ \frac{c'}{a'} &= \frac{c}{a} \,.\, 0{\cdot}999701. \end{aligned} \right.$$

5. Auch Mitscherlich stellte Beobachtungen über die Änderung des Axenverhältnisses des Aragonits durch die Wärme an. Derselbe fand für die Temperaturen + 14° R. und + 114° R. folgende Winkel:

	$t = 14°$ R. $= 17°5$ C.	$t = 114°$ R. $= 142°5$ C.
$(101)\,(\bar{1}01) =$	$116° \, 11' \, 46''\tfrac{2}{3}$	$116° \, 15' \, 28''\tfrac{1}{3}$
$(110)\,(\bar{1}10) =$	$108° \, 26' \;\; 0''$	$108° \, 20' \, 30''$

hieraus ergeben sich die Axenverhältnisse

$$(13) \quad \left\{ \begin{aligned} a : b : c &= 1 : 0{\cdot}720781 : 0{\cdot}622490 \qquad t = 17°5 \text{ C.} \\ a'' : b'' : c'' &= 1 : 0{\cdot}751997 : 0{\cdot}621745 \qquad t = 142°5 \text{ C.} \end{aligned} \right.$$

Aus diesen beiden Verhältnissen bekommt man für die Axenlängen bei einer beliebigen Temperatur t (im Grade Cels.) folgende Formeln:

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} \frac{b_t}{a_t} &= 0{\cdot}720610 \,(1 + 0{\cdot}0000135 \, t) \\ \frac{c_t}{a_t} &= 0{\cdot}622627 \,(1 - 0{\cdot}0000125 \, t) \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen erhält man für eine Temperatur von 81°5 C. das Axenverhältniss

$$a' : b' : c' = 1 : 0{\cdot}721403 : 0{\cdot}621992$$

und in Bezug auf das Axenverhältniss a, b, c für 17°5 C. aus Gleichung 13)

$$\left.\begin{aligned} \frac{b'}{a'} &= \frac{b}{a} \,.\, 1{\cdot}000864 \\ \frac{c'}{a'} &= \frac{c}{a} \,.\, 0{\cdot}999200. \end{aligned}\right\} \quad (15)$$

Der Temperaturunterschied für $a, b, c \ldots a'\ b'\ c'$ beträgt auch hier 64° C. und falls die absolute Temperatur sich um ein Geringes von der Rudberg'schen unterscheidet, so hat dieses kaum irgend einen Einfluss auf die vorstehenden Zahlenwerthe. Doch ist die Differenz der Werthe aus den Gleichungen 12) und 15) zu gross, um sie Beobachtungsfehlern zuzuschreiben; auch sind die Differenzen für beide Verhältnisse in demselben Sinne. Nach Gleichung 15) nämlich ändert sich sowohl $\frac{b}{a}$ als $\frac{c}{a}$ stärker als nach Gleichung 12). Es scheint daraus hervorzugehen, dass jedenfalls bis zu einer Temperatur von 82° C. das Axenverhältniss des Aragonits sich weniger ändert, als es die Formeln 14) angeben, und dass daher auch noch in diesen Formeln wenigstens auf die zweiten Potenzen von t Rücksicht zu nehmen ist, falls man die Axenlängen auch nur auf vier Decimalstellen richtig haben will: vorausgesetzt, dass nicht etwa in den Messungen Mitscherlich's irgend ein Beobachtungsfehler liegt.

6. Um schliesslich beurtheilen zu können, wie gross der Winkel (W) ist, den die durchgehende Wellennormale der ausserordentlichen Strahlen bei dem Minimum ihrer Ablenkung mit einer gegen beide Prismenseiten gleichgeneigten Linie einschliesst, so findet man für das Prisma A, Nr. 2 aus den Gleichungen IV und 1

$$i - \frac{A + D}{2} = 0°\ 3'\ 48''$$

$$W = r - \frac{A}{2} = 0°\ 1'\ 41''.$$

Beide Winkel sollten gleich Null sein, falls die Wellennormale bei dem Minimum gleichgeneigt hindurchginge. Man erhält aus diesen Werthen

$$i = 47° \, 41' \, 54''$$
$$r = 25° \, 53' \, 35''$$

und hieraus den Brechungsquotienten für die durch r gegebene Richtung

$$n = 1 \cdot 69369.$$

Rechnet man aber den Brechungsquotienten unter der Voraussetzung, dass die Normale gleichgeneigt gegen die Prismenseiten ist, so hat man den schon ziemlich abweichenden Werth

$$(n) = 1 \cdot 69127.$$

Hieraus würde sich unter obiger Voraussetzung nach Gleichung 2) für den Winkel der Halbirungslinie mit der Axe c der Werth ergeben

$$(\theta) = 23° \, 40' \, 5''.$$

Rechnet man mit diesem fehlerhaften Werthe die Änderung des Axenverhältnisses, so erhält man

$$\left(\frac{c'}{a'}\right) = \frac{c}{a} \, . \, 0 \cdot 98810$$

einen Werth, welcher bedeutend von dem wahren Werthe der Grösse $\frac{c'}{a'}$ abweicht, daher von einer Vernachlässigung des Winkels W nicht die Rede sein kann. Bedenkt man aber, wie es sich aus den Gleichungen 8) leicht beweisen lässt, dass der Winkel W wirklich gleich Null wird, wenn die Halbirungslinie des brechenden Winkels mit einer Axe zusammenfällt, so sieht man auch sogleich, dass das Prisma A, Nr. 2 von allen Prismen die ungünstigte Orientirung hat, indem für dasselbe der Winkel der Halbirungslinie mit der nächsten Axe den grössten Winkel einschliesst.
